

# 1. Primer

-1-

Naponsko stanje u tački tela zadato je komponentama

$$\begin{aligned} \sigma_x = 1 & \quad \sigma_y = -2 & \quad \sigma_z = 4 \\ \tau_{xy} = 2 & \quad \tau_{yz} = -3 & \quad \tau_{zx} = 1 \end{aligned} \quad [\text{kN/mm}^2]$$

Određiti invarijante tenzora napona kao i veličine glavnih napona.

Rešenje

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I_1 \quad J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 1 - 2 + 4 = 3$$

$$I_2 \quad J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$I_2 \quad J_2 = -2 - 8 + 4 - (2^2 + 3^2 + 1^2) = -20$$

$$I_3 \quad J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$I_3 \quad J_3 = -8 + 2 \cdot (-6) - 1 \cdot (-3)^2 - (-4) - (-24) = -43$$

Sekularna jednačina

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 20\sigma + 43 = 0 = W$$

$$\text{za } \sigma = 0 \quad W = 43$$

$$\text{za } \sigma = 1 \quad W = 21$$

$$\text{za } \sigma = 2 \quad W = -1 \quad \Delta W = -1$$

$$\frac{dW}{d\sigma} = \frac{\Delta W}{\Delta \sigma} = 3\sigma^2 - 6\sigma - 20 \rightarrow \Delta \sigma$$

$$\Delta \sigma = \frac{\Delta W}{dW/d\sigma} = \frac{-1}{3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 20} = \frac{-1}{3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 20} = 0,05$$

$$\sigma_1 = \sigma_1' - \Delta \sigma = 2 - 0,05 = 1,95$$

$$\sigma_1 = 1,95$$

Ostala rešenja

$$(\sigma^3 - 3\sigma^2 - 20\sigma + 43) : (\sigma - 1,95) = \sigma^2 - 1,05\sigma - 22,05$$

$$W = (\sigma^2 - 1,05\sigma - 22,05)(\sigma - 1,95) = 0$$

$$\sigma_{2,3} = \frac{1,05 \pm \sqrt{1,05^2 + 4 \cdot 22,5}}{2}$$

$$\sigma_2 = 5,25 \quad \sigma_3 = -4,2$$

(uslovno)

$$\sigma_1 = 5,25 \quad \sigma_2 = 1,95 \quad \sigma_3 = -4,2$$

## 2. Primer

Na osnovu zadate sekularne jednačine odvesti glavne napone

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 - 10\sigma + 16 = 0$$

$$J_1 = 6 \quad J_2 = -10 \quad J_3 = -16$$

$$W_0 = 0 - 6 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 16 = 16$$

$$W_1 = 1 - 6 - 10 + 16 = 1 \quad \Delta W = 1$$

$$W' = \frac{dW}{d\sigma} = 3\sigma^2 - 12\sigma - 10$$

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta W}{W'} = \frac{1}{3\sigma^2 - 12\sigma - 10} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 12 - 10} = -\frac{1}{19} = -0,053$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^* - \Delta\sigma$$

$$\sigma_1 = 1 + 0,05 \cdot 3 \approx 1,05$$

$$(\sigma^3 - 6\sigma^2 - 10\sigma + 16) : (\sigma - 1,05) = \sigma^2 - 4,95\sigma - 15,2 \Rightarrow \sigma_{2,3} = \frac{4,95 \pm \sqrt{4,95^2 + 4 \cdot 15,2}}{2}$$

$$\sigma_1 = 7,0919 \quad \sigma_2 = 1,0522 \quad \sigma_3 = -2,1441$$

Provera invarijanti

$$J_1 = 6$$

$$J_2 = -9,98 \approx -10$$

$$J_3 = -15,93 \approx -16$$



b)  $T_{D5} = T_0 - T_0^s$  -4-

Srednji normalni napon  $\bar{\sigma}_{sr} = \frac{2+2+2}{3} = 2$

$$T_{D5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Invarijante derjatora tenzora napona su

$$J_{D1} = 0$$

$$J_{D2} = -\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{6} \left[ (4-2)^2 + (2-2)^2 + (2-4)^2 \right] = -\frac{8}{6}$$

$$J_{D3} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$$

c) Normalni efektivni napon

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{3 |J_{D2}|} = \sqrt{3 \left| -\frac{8}{6} \right|} = 2$$

$$\bar{\tau}_e = \frac{\bar{\sigma}_e}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

d) Oktaedarski napon

Normalni oktaedarski napon

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_{sr} = \bar{\sigma}_e = 2$$

Totalni oktaedarski napon

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Tangencijalni oktaedarski napon

$$\bar{\tau}_0 = \sqrt{S_0^2 - \bar{\sigma}_0^2} = \sqrt{8 - 2^2} = 2$$

### 4. Primer

Za zadati tenzor napona odrediti invarijantne karakteristike i glavne napone

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 6; \quad \sigma_{sr} = 2$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 3 - 4 + 2 - 3$$

$$J_2 = -3$$

$$J_3 = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 - 8 - 27$$

$$J_3 = 6 + 6 + 6 - 1 - 8 - 27 = -18$$

$$T_D = T_0 - \sigma T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{D1} = 0$$

$$J_{D2} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$J_{D2} = -9 - 1 - 1 - 4 = -15$$

$$J_{D3} = 0 + 6 + 6 + 1 - 9 = 4$$

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 - 3\sigma + 18 = 0$$

$$\sigma_1 = 6,00$$

$$\sigma_2 = 1,73$$

$$\sigma_3 = -1,73$$

$$\sigma_e = \sqrt{3J_{D2}} = \sqrt{3 \cdot 15} = \sqrt{45} = 6,71$$

$$\cos 3\beta_\sigma = \frac{27}{2 \cdot \sigma_e^3} - J_{3D} = \frac{27}{2 \cdot 6,71^3} \cdot 4 = 0,17889$$

$$3\beta_\sigma = 79,69^\circ$$

$$\beta_\sigma = 26,56^\circ$$

$$\sigma_1 = \sigma_{sr} + \frac{2}{3} \sigma_e \cos \beta_5 = 2 + \frac{2}{3} \cdot 6,71 \cdot \cos 26,56^\circ$$

$$\sigma_1 = 6,00$$

$$\sigma_2 = \sigma_{sr} + \frac{2}{3} \sigma_e \sin(\beta_5 - 30^\circ) = 2 + \frac{2}{3} \cdot 6,71 \cdot \sin(26,56^\circ - 30^\circ)$$

$$\sigma_2 = 1,73$$

$$\sigma_3 = \sigma_{sr} - \frac{2}{3} \sigma_e \cos(60^\circ - \beta_5) = 2 - \frac{2}{3} \cdot 6,71 \cdot \cos(60^\circ - 26,56^\circ)$$

$$\sigma_3 = -1,73$$

### 5. Primer

U naprutoj ravni kroz tačku A sa normalom  $n(1/3, 2/3, 2/3)$  i tenzorom napona u istoj tački

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 30 & 8 & -6 \\ 8 & 20 & 15 \\ -6 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

potrebno je odrediti:

- normalni i tangencijalni napon
- projekcije ukupnog napona i ukupni napon
- glavne normalne naponne
- pravce glavnih normalnih napona
- sferični tenzor napona i determinanta tenzora napona

Rešenje:

$$\sigma_n = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x$$

$$\sigma_n = 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-10) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + 2 \cdot (-6) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = 22$$

(proveriti)

$$\text{Ukupni napon: } S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

$$S_x = \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z = 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 11,33$$

$$S_y = \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 26$$

$$S_z = \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 1,33$$

$$S = \sqrt{11,33^2 + 26^2 + 1,33^2} = 28,40$$

$$\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_{\text{sr}}^2} = \sqrt{28,40^2 - 22^2} = 17,93$$

Glavni normalni naponi se određuju iz sekularne jed.

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

$$J_1 = 3\sigma_{\text{sr}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 30 + 20 - 10 = 40$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$J_2 = 30 \cdot 20 + 20 \cdot (-10) + (-10) \cdot 30 - 8^2 - 15^2 - 6^2 = -225$$

$$J_3 = \text{Det } T_{\sigma} = 30 \cdot 20 \cdot (-10) - 8 \cdot 15 \cdot 6 - 8 \cdot 15 \cdot 6 - 6 \cdot 20 \cdot 6 - 15 \cdot 15 \cdot 30 + 8 \cdot 8 \cdot 10 = -14270$$

$$\sigma^3 - 40\sigma^2 - 225\sigma + 14270 = 0$$

$$\sigma_1 = 34,6 \quad \sigma_2 = 23,2 \quad \sigma_3 = -17,8$$

Pravci glavnih napona

$$\frac{\cos \alpha_i}{\begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_i) \end{vmatrix}} = \frac{\cos \beta_i}{\begin{vmatrix} \tau_{yz} & \tau_{yx} \\ (\sigma_z - \sigma_i) & \tau_{zx} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \gamma_i}{\begin{vmatrix} \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_i) \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix}}$$

Posle zamenenja  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  uz uslov da je

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1$$

dobija se

$$\vec{n}_1 = 0,84488 \vec{i} + 0,53097 \vec{j} + 0,065 \vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = -0,5039 \vec{i} + 0,7494 \vec{j} + 0,42944 \vec{k}$$

$$\vec{n}_3 = 0,17919 \vec{i} - 0,3952 \vec{j} + 0,910 \vec{k}$$

$$\text{g. } \alpha_1 = 32,34^\circ \quad \beta_1 = 57,93^\circ \quad \gamma_1 = 86,275^\circ \quad \text{itd}$$

Sferični tenzor

$$\bar{\sigma}_{sr} = \frac{1}{3} J_1 = \frac{30 + 20 - 10}{3} = 13,33$$

$$T_s = \begin{bmatrix} 13,33 & 0 & 0 \\ 0 & 13,33 & 0 \\ 0 & 0 & 13,33 \end{bmatrix}$$

$$D_s = \begin{bmatrix} 16,67 & 8 & -6 \\ 8 & 6,67 & 15 \\ -6 & 15 & -23,33 \end{bmatrix}$$

### 6. Primer

Za napensko stanje definirano tenzorom napona odrediti mehaničku situaciju deformacije.

$$T_s = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Uputstvo

- odrediti glavne napone  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
- proveriti preko invarijanti
- odrediti  $T_{D_s}$
- Odrediti invarijante  $T_{D_s}$
- Naortati Moxove vektorove
- odrediti  $n_s$  i  $\beta_s$



7. Primer

Naponsko stanje u posmatranoj tački tela određeno je tenzorom napona iz 1. primera

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- grafičkim putem odrediti glavne normalne napone
- izračunati glavne tangencijalne napone
- odrediti srednji normalni napon i sferični tenzor napona kao i devijator tenzora napona

Rešenje

- Komponente glavnih normalnih napona određuju se na osnovu sekularne jednačine

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

Invarijante tenzora napona određene su u 1. primeru iznosi

$$J_1 = 3 \quad J_2 = -20 \quad J_3 = -43$$

tako da će sekularna jednačina glasniti

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 20\sigma + 43 = 0 = f(\sigma)$$

Na slici je det grafiku prikaz  $f$  je  $f(\sigma)$  koja preseca apscisu u tačkama  $-4,2$ ,  $1,95$  i  $5,25$ , pa su preme tome to koreni sekularne jednačine

$\sigma$	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(\sigma)$	-57	-18,88	11	33,38	49	63	62,88	59	42,13	43	32,38	21

$\sigma$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
$f(\sigma)$	9,63	-1,00	-10,13	-17	-20,88	-20	-16,63	-7	8,63

$$\sigma_1 = 5,25 \quad \sigma_2 = 1,95 \quad \sigma_3 = -4,2$$

b) Glavni tangencijalni naponi

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{5,25 - 1,95}{2} = \pm 1,65$$

$$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1,95 + 4,2}{2} = \pm 3,075$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \frac{-4,2 - 5,25}{2} = \pm 4,725$$

c) Srednji normalni napon

$$\bar{\sigma}_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\bar{\sigma}_{sr} = \frac{1 - 2 + 4}{3} = 1 = \frac{5,25 + 1,95 - 4,2}{3}$$

Sferični tenzor napona:

$$T_{\sigma}^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devijator tenzora napona

$$T_{D\sigma} = T_{\sigma} - T_{\sigma}^S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

## 8. Primer

Tenzor napona u tački A ima vrednost

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 25 & -12 & 6 \\ -12 & 20 & 3 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Potrebno je:

a) Odrediti projekcije ukupnog napona u pravcu koordinatnih osa

b) Odrediti komponente normalnog i tangencijalnog napona kao i ukupni <sup>me znam do li treba</sup> napon u ravni koja prolazi kroz tačku A sa normalom  $\vec{n} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

c) Odrediti glavne normalne napone

d) Odrediti pravce glavnih normalnih napona

## Rešenje

$$a) S_x = 25 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{3} = 8,33$$

$$S_y = -12 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8,00$$

$$S_z = 6 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{1}{3} + 15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} = 16,67$$

Totalni napon

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{24}{3}\right)^2 + \left(\frac{50}{3}\right)^2} = 20,28$$

b) Normalni i tangencijalni napon u nagnetoj ravni odvedeni su izrazima

$$\sigma_n = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z = \frac{25}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{24}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{50}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{174}{9} = 19,33$$

$$\tau = \pm \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} = \pm \sqrt{20,28^2 - 19,33^2} = 6,13$$

c) Glavni normalni naponi mogu se odrediti i pomoću sledećih izraza

$$\sigma_1 = \sigma_{sr} + \frac{2}{3} \sigma_e \cos \beta_5$$

$$\sigma_2 = \sigma_{sr} + \frac{2}{3} \sigma_e \sin(\beta_5 - 30^\circ)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{sr} - \frac{2}{3} \sigma_e \cos(60^\circ - \beta_5)$$

poni čemu je

$$\sigma_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{25 + 20 + 15}{3} = 20$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} |\sigma_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(25-20)^2 + (20-15)^2 + (15-20)^2 + 6(-12^2 + 8^2 + 6^2)} = 27,24$$

$$\cos(3/\beta_5) = \frac{27}{2\sigma_e^2} \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{sr} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{sr} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{sr} \end{bmatrix} = \frac{27}{2 \cdot 27,24^2} \begin{bmatrix} 5 & -12 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \\ 6 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\cos(3/\beta_5) = -2,47559 \quad 3/\beta_5 = 118,40^\circ \quad \beta_5 = 39,47^\circ$$

- 13 -

Komponente glavnih napona će biti:

$$\sigma_1 = 20 + \frac{2}{3} 27,74 \cos 39,47^\circ = 34,28$$

$$\sigma_2 = 20 + \frac{2}{3} 27,74 \sin(39,47^\circ - 30^\circ) = 23,04$$

$$\sigma_3 = 20 - \frac{2}{3} 27,74 \cos(60^\circ - 39,47^\circ) = 2,68$$

Provera:

Prva invarijanta tenzora napona

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 25 + 20 + 15 = 60$$

ili

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 34,28 + 23,04 + 2,68 = 60$$

Napomena: Pošto je ugao nida  $\beta_0 = 39,47^\circ$  može se konstatovati da je u pitanju kritična jedna dvanjatora tenzora napona

d) Prava glavnih normalnih napona

Zamenom  $\sigma_1 = 34,28$  u odgovarajući sistem jednačina dobija se

$$(25 - 34,28)a_{x_1} - 12a_{y_1} + 6a_{z_1} = 0$$

$$-12a_{x_1} + (20 - 34,28)a_{y_1} + 8a_{z_1} = 0$$

$$6a_{x_1} + 8a_{y_1} + (15 - 34,28)a_{z_1} = 0$$

odnosno

$$-9,28a_{x_1} - 12a_{y_1} + 6a_{z_1} = 0$$

$$-12a_{x_1} - 14,28a_{y_1} + 8a_{z_1} = 0$$

$$6a_{x_1} + 8a_{y_1} - 19,28a_{z_1} = 0$$

odakle sledi da je

$$\frac{a_y}{a_z} = 17,77 \quad \text{i} \quad \frac{a_x}{a_z} = -22,33$$

Uzimajući u obzir i relaciju:

$$a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2 + a_{z_1}^2 = 1$$

dobija se:

$$a_{x1} = 0,78199$$

$$a_{y1} = 0,62230$$

$$a_{z1} = 0,0350$$

$$\alpha_{x1} = 38,56^\circ$$

$$\alpha_{y1} = 51,51^\circ$$

$$\alpha_{z1} = 87,99^\circ$$

Za pomoć komponenti glavnih napona  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  u odgovarajućem sistemu jednačina mogu se na isti način odrediti pravci ovih napona prema koordinačnim osama.

### 3. primer

Naponsko stanje u posmatranoj tački tela odvedeno je tenzorom napona:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 28 & -3 & 2 \\ -3 & 17 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- Konstruisati Mohrov krug napona
- Iz trougla Mohr-Kozenberg odrediti efektivni normalni napon
- Odrediti ugao nide naponskog stanja i naponsku osu
- Odrediti pokazatelj naponskog stanja  $\beta$

### Rešenje

- a) Za konstruisanje Mohrovog kruga napona neophodno je odrediti komponente glavnih normalnih napona. Primenom poznatog postupka dolazi se do sledećih rešenja

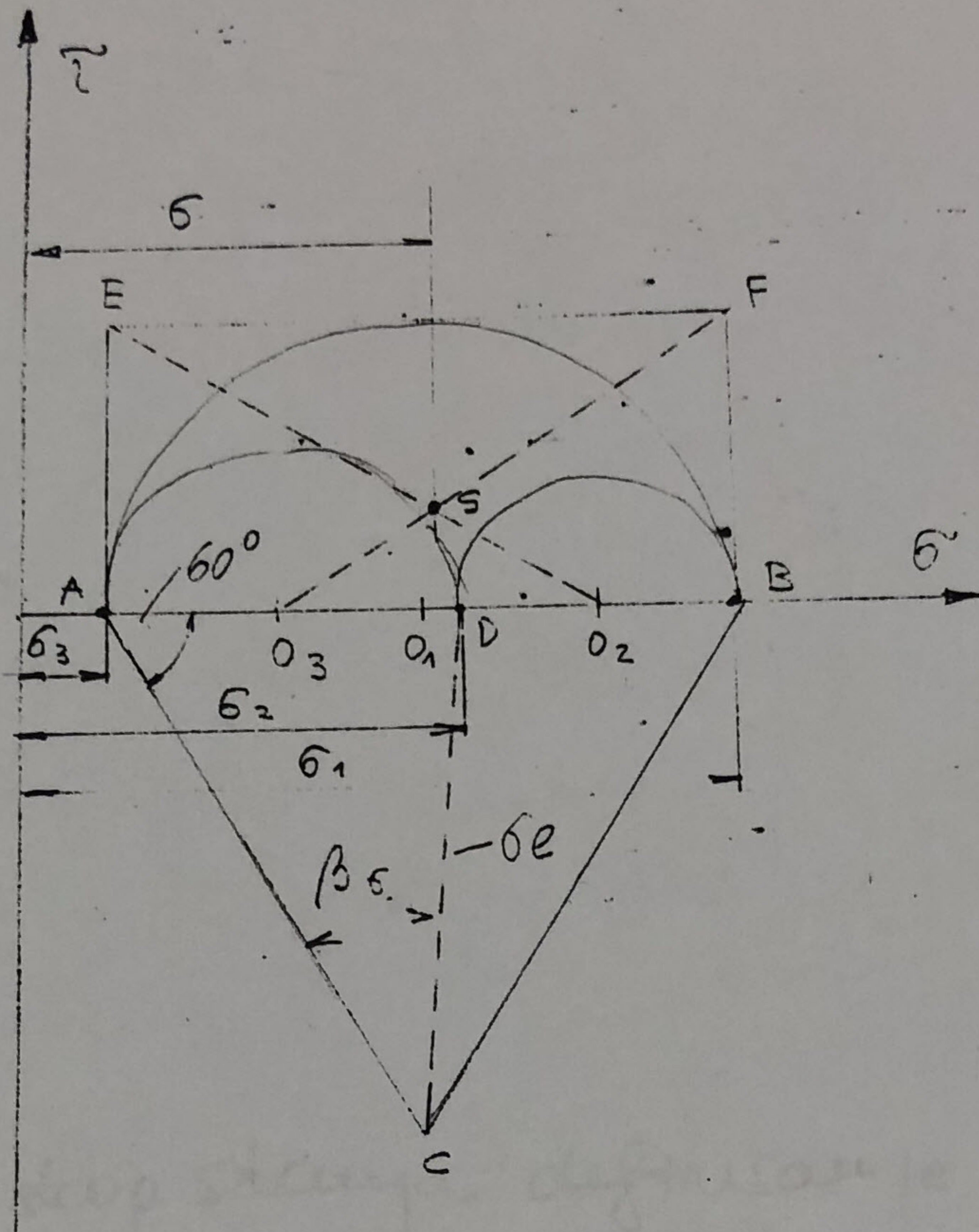
$$J_1 = 50 \quad J_2 = 672 \quad J_3 = 1771$$

$$\sigma^3 - 50\sigma^2 + 672\sigma - 1771 = 0$$

odakle je

$$\sigma_1 = 28,81 \quad \sigma_2 = 17,72 \quad \sigma_3 = 3,47$$

Mohrov krug napona dat je na slici.



sl 9 - Mohrov kružnica

b) Efektivni normalni napori se more se določiti na osnovu izraza (21)

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(28,81 - 17,72)^2 + (17,72 - 3,47)^2 + (3,47 - 28,81)^2} = 22$$

c) ugao vide naponskog stanja i  
naponske rane

-16-

d) Pokazatelj naponskog stanja definisao je sledećim izrazom

$$\beta = \frac{\sum \sigma_i}{\sigma_e} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_e} = \frac{28,81 + 17,72 + 3,47}{22} = 2,27$$

Na osnovu toga se može konstatovati da u posmatranoj tački deluje neomeđeno naponsko stanje sa aspekta deformabilnosti materijala.

10. primer:

Naponsko stanje iz prethodnog zadatka promenejeno je delovanjem hidrostatičkog napona (sfernog tenzora)  $\sigma = -35$

- odrediti komponente glavnih napona
- odrediti pokazatelj naponskog stanja

a) Glavno naponsko stanje u posmatranoj tački određeno je zbirou tenzora:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 28 & -3 & 2 \\ -3 & 17 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -3 & -18 & 4 \\ 2 & 4 & -30 \end{bmatrix}$$

Sekularna jednačina u ovom slučaju glasi:

$$\sigma^3 + 55\sigma^2 + 876\sigma + 3374 = 0$$

Čije su rešenja:

$$\sigma_1 = -5,65 \quad \sigma_2 = -21,26 \quad \sigma_3 = -28,09$$

b) Pokazatelj naponskog stanja

$$\beta = \frac{3\sigma_{\text{sr}}}{\sigma_e} = \frac{\sigma_1}{\sigma_e}$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(-5,65 + 21,26)^2 + (-21,26 + 28,09)^2 + (-28,09 - 5,65)^2} = 19,92$$

$$\beta = -\frac{5,65}{19,92} = -2,76$$

Poređenjem ove vrednosti sa pokazateljem naponskog stanja iz prethodnog zadatka može se konstatovati da vremenom pritiska zna utice na poposavajanje uslova deformisanja